

Das passive Problem der anomalen Plasma-Diffusion

Klaus Elsässer

Theoretische Physik I, Universität Bochum

Z. Naturforsch. **37a**, 786–794 (1982); eingegangen am 17. Dezember 1981

To Professor Arnulf Schlüter on his 60th Birthday

The Passive Problem of Anomalous Plasma Diffusion

The diffusion of magnetic lines of force in a toroidal plasma is equivalent within a perturbative treatment, to the problem of turbulent convection in two space dimensions. Neglecting a triple-correlation the diffusion coefficient D is, therefore, given as a spectral and ensemble mean of the Green's function, and the following order of magnitude is obtained:

$$D_{xx} \approx \text{Min}(L_0 |\tilde{B}_x|^2/B_0^2, l_0 |\tilde{B}_x|/B_0),$$

where L_0 and l_0 are the (Eulerian) correlation lengths of the magnetic fluctuations $\tilde{\mathbf{B}}$ parallel and perpendicular to the unperturbed field \mathbf{B}_0 , respectively.

1. Einführung und Zusammenfassung

Das wachsende, aber noch mangelhafte Verständnis der Verluste eines magnetisierten Plasmas in toroidaler Anordnung spiegelt sich seit einiger Zeit in einem gewissen Reichtum der Begriffe wider: Neben der klassischen Diffusion [1] kennt man auch die Pfirsch-Schlüter-Diffusion [2], die neoklassische [3], [4] und die anomale [5] Diffusion. Während in den ersten drei Fällen der Transport von Plasma quer zum Magnetfeld unmittelbar auf Coulombstößen beruht — mit unterschiedlicher Berücksichtigung der toroidalen Geometrie und unterschiedlichem Bereich der Stoßfrequenz — ist von anomaler Diffusion immer dann die Rede, wenn Plasma-Instabilitäten zu einer mehr oder weniger ausgeprägten Turbulenz und daher zu turbulentem Transport führen. Es scheint, daß zumindest die Energiebilanz der Elektronen, welche die typischen Einschlußzeiten der Tokamak-Plasmen definiert, noch ungeklärt ist [6] und daher Raum für Spekulationen über anomalen Transport läßt. Denken wir uns einmal die schwierige und vielfach behandelte Frage gelöst, welche Instabilitäten zu welchen typischen Schwankungen $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ des elektrischen bzw. magnetischen Feldes führen, so bleibt uns beim Vergleich mit der Erfahrung nicht erspart, auch das passive Problem der anomalen Diffusion zu lösen,

Sonderdruckanforderungen an Prof. Dr. K. Elsässer, Theoretische Physik I, Ruhr-Universität Bochum, Postfach 2148, D-4630 Bochum.

nämlich die Frage, welche Verluste an Teilchen und Energie zu vorgegebenen statistischen Eigenschaften von $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ passen. Üblicherweise wird dieses Problem störungstheoretisch behandelt, so daß es also nur auf die ersten und zweiten Momente der statistischen Größen ankommt. Das denkbar einfachste Modell ergibt sich, wenn man die zeitliche Konstanz der Teilchendichte n der Elektronen bzw. Ionen in einem mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = c\tilde{\mathbf{E}}/B$ oder $\mathbf{v} = \text{const} \times \mathbf{B}/B$ mitbewegten System fordert: Dank einer radialen Komponente von \mathbf{v} ergibt sich dann in zweiter Ordnung der Störungsrechnung für den Erwartungswert $\langle n \rangle$ ein Plasma-Verlust durch Diffusion in radialer Richtung, wobei der Diffusionskoeffizient sich als ein Integral über das Spektrum der Schwankungen von \mathbf{v} darstellen läßt. Man sollte meinen, daß dieses Problem längst behandelt und befriedigend gelöst wurde, aber nur der erste Teil dieser Vermutung trifft zu.

Wählt man die zweite der oben angedeuteten Möglichkeiten für \mathbf{v} , so reduziert sich das Problem im stationären Fall auf die Aufgabe, zu vorgegebenem Feld $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ die Feldlinien zu finden („magnetische Abbildung“). Dies ist schon in den sechziger Jahren im Rahmen der „quasilinearen Theorie“ behandelt [7] und neuerdings wieder aufgegriffen worden [8], [9], [10], im Hinblick auf die Möglichkeit, daß ein anomaler Plasma-Verlust mit dem Aufbrechen magnetischer Oberflächen zu tun haben könnte [11]. Zur Ableitung einer Näherungsformel für den Diffusionskoeffizienten genügt es, ein karte-

0340-4811 / 82 / 0800-0786 \$ 01.30/0. — Please order a reprint rather than making your own copy.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

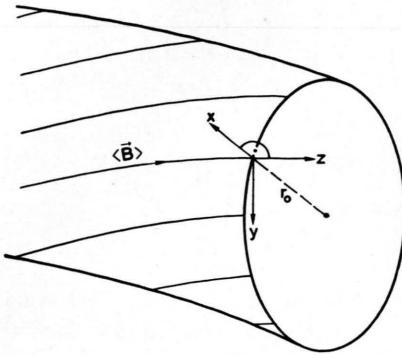


Abb. 1. Die Lage des kartesischen Koordinatensystems auf einer Torusfläche.

sisches Koordinatensystem wie in Abb. 1 zu betrachten: Der Ursprung liegt auf einem Torus mit kreisförmigem kleinem Querschnitt $r \leq r_0$, die x -Achse zeigt in Richtung wachsender r , und die z -Achse ist parallel zum mittleren Magnetfeld $\mathbf{B}_0 = \langle \mathbf{B} \rangle_{z=0}$, das aus dem Vakuumfeld und dem mittleren Plasmafeld besteht und in der Tangentialebene des betrachteten Toruspunktes liegen möge. Folgende Erkenntnisse, die ich in den nächsten Abschnitten darstellen werde, gehen über das aus der oben zitierten Literatur bekannte hinaus: (1) Das Problem der magnetischen Abbildung für dreidimensionale Störungen $\tilde{\mathbf{B}}$ lässt sich im Rahmen der Störungstheorie auf das Problem der passiven turbulenten Konvektion einer Substanz in zwei Raumdimensionen (x - y -Ebene) zurückführen, wobei das vom Plasma erzeugte mittlere Scherfeld $\langle \mathbf{B} \rangle - \mathbf{B}_0$ die Rolle einer mittleren Scherströmung spielt. (2) Die quasilineare Theorie für dieses Problem ist ein Spezialfall der Näherung von Bourret [12]. (3) Die von Kadomtsev und Pogutse [9] vorgeschlagene Skalierung der Korrelationslängen l_0, L_0 in x - bzw. z -Richtung, $l_0/L_0 \approx |\tilde{B}_x|/|\mathbf{B}|$, entspricht der im hydrodynamischen Fall gebräuchlichen Skalierung von Korrelationszeit T_0 und -länge, $l_0/T_0 \approx |\tilde{v}|$, und geht über die übliche quasilineare Betrachtung von Plasmastörungen hinaus. (4) Wenn man im exakten Ausdruck für den Diffusionskoeffizienten D_{xx} eine Tripel-Korrelation wegläßt, erhält man immer D_{xx} aus einem doppelten Mittelwert, dem spektralen und Ensemble-Mittel der Greenschen Funktion für die zugrundeliegende Gleichung, und es gilt großenordnungsmäßig

$$D_{xx} \approx \text{Min}(L_0 |\tilde{B}_x|^2/B_0^2, l_0 |\tilde{B}_x|/B_0).$$

2. Grundgleichungen

Wir gehen aus von der Konstanz der Teilchen-dichte n in einem lokal mitbewegten System:

$$\partial n/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla n = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

und denken uns \mathbf{v} zerlegt in seinen Ensemble-Mittelwert $\langle \mathbf{v} \rangle$ und eine Schwankung, $\tilde{\mathbf{v}}$. Parallel hierzu betrachten wir das Problem der magnetischen Abbildung: Sei n irgendeine Funktion von \mathbf{x} , die längs der Magnetfeldlinien konstant ist, so gilt:

$$\mathbf{B} \cdot \nabla n = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4)$$

Ich wähle das in Abb. 1 dargestellte Koordinaten-system, in dem \mathbf{B} am Ursprung parallel zum Einheitsvektor \mathbf{e}_z in z -Richtung weist. Es sei ferner

$$\mathbf{B} = B_0(\mathbf{e}_z + \mathbf{b}); \quad |\mathbf{b}| \ll 1, \quad (5)$$

$$\langle \mathbf{b} \rangle = (x/L_s) \mathbf{e}_y, \quad (6)$$

wobei $\langle \mathbf{b} \rangle$ das vom Plasma erzeugte mittlere Scherfeld darstellt, relativ zum Feld am Ursprung, mit der typischen Scherlänge $L_s \approx O(qR)$ ($q = \text{Sicherheitsfaktor} \geq 1$, $R = \text{großer Radius}$). Wenn ich Gl. (3) durch $|\mathbf{B}|$ dividiere und Gl. (5) darin einsetze, erhalte ich durch Entwicklung nach $|\mathbf{b}|$:

$$[(1 - \frac{1}{2}b_{\perp}^2) \partial/\partial z + (1 - b_z) \mathbf{b}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp}] n + O(b^3) = 0, \quad (7)$$

wobei \mathbf{b}_{\perp} die zur z -Achse senkrechte Komponente von \mathbf{b} ist, und ∇_{\perp} die Ableitungen nach x und y zusammenfaßt. Dividieren wir noch durch den Faktor von $\partial/\partial z$ und lassen wiederum alle Terme der Ordnung $|\mathbf{b}|^3$ beiseite — was nicht mehr eigens notiert wird — so erhalten wir eine Gleichung des folgenden Typs:

$$\mathcal{L}n = 0, \quad (8)$$

$$\mathcal{L} = \dot{\mathcal{L}} + \delta\mathcal{L}, \quad (9)$$

$$\dot{\mathcal{L}} = (\partial/\partial z) + \langle \mathbf{b}_{\perp} \rangle \cdot \nabla_{\perp} - \langle b_z \mathbf{b}_{\perp} \rangle \cdot \nabla_{\perp}, \quad (10)$$

$$\delta\mathcal{L} = \tilde{\mathbf{b}}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} + O(\tilde{b}^2), \quad (11)$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - \langle \mathbf{b} \rangle. \quad (12)$$

Der letzte Ausdruck in (10) kann für $x/L_s \ll 1$ aus Symmetriegründen weggelassen werden. Berücksichtigen wir in dem stochastischen Operator $\delta\mathcal{L}$ nur den in $\tilde{\mathbf{b}}$ linearen Term, so erhalten wir in (8) wieder

unsere Ausgangsgleichung (1), wobei jetzt t durch z und \mathbf{v} durch \mathbf{b}_\perp ersetzt ist; es ist allerdings zu bemerken, daß sich die Inkompressibilitätsbedingung (2) nur dann auf $\nabla_\perp \cdot \mathbf{b}_\perp = 0$ reduziert, wenn b_z nicht von z abhängt. Mir genügt es im folgenden, die Grundgleichungen (1) und (2) in d Raumdimensionen zu betrachten: $d=3$ ist der ursprüngliche Fall, wo z.B. \mathbf{v} aus einer $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift folgt, und $d=2$ bezieht sich in der angegebenen Weise auf die magnetische Abbildung. In beiden Fällen nehme ich an, daß nach Gl. (6) $\langle \mathbf{v} \rangle$ eine Couette-Strömung darstellt. Den Korrelationstensor von $\tilde{\mathbf{v}}$ werde ich später spezifizieren.

3. Diffusionskoeffizienten

Wenn es gelingt, den durch $\tilde{\mathbf{v}}$ bewirkten mittleren Teilchenfluß $\langle \tilde{\mathbf{v}} n \rangle$ linear auf den mittleren Dichtegradienten $\nabla \langle n \rangle$ zu beziehen, so wird dadurch eine Matrix \mathbf{D} definiert, deren Elemente die Diffusionskoeffizienten sind:

$$\langle \tilde{\mathbf{v}} n \rangle = -\mathbf{D} \cdot \nabla \langle n \rangle. \quad (13)$$

Ich will hier nicht die Bedingungen einer solchen Näherung untersuchen, sondern nur den Ausdruck für \mathbf{D} angeben, wie er aus der Störungstheorie folgt. Hierzu schreibe ich Gl. (1) ähnlich wie in (8)–(11):

$$\mathcal{L} n \equiv (\mathring{\mathcal{L}} + \delta \mathcal{L}) n = 0, \quad (14)$$

$$\mathring{\mathcal{L}} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{x}{L_s} \frac{\partial}{\partial y}, \quad (15)$$

$$\delta \mathcal{L} = \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}. \quad (16)$$

Die allgemeine Lösung n , die bei $t=0$ einer glatten Verteilung $n_0(\mathbf{x})$ in d Dimensionen entspricht, läßt sich mit Hilfe der Greenschen Funktion $G = G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', 0)$ wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} n(\mathbf{x}, t) &= \int d^d x' G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', 0) n_0(\mathbf{x}') \\ &\equiv G * n_0. \end{aligned} \quad (17)$$

Setzen wir voraus, daß für jede Realisierung von $\tilde{\mathbf{v}}$ die gleiche Anfangsverteilung n_0 zu nehmen ist, so erhalten wir für den Mittelwert:

$$\langle n \rangle = \langle G \rangle * n_0 \quad (18)$$

und für den fraglichen Teilchenfluß:

$$\langle \tilde{\mathbf{v}} n \rangle = \langle \tilde{\mathbf{v}} G \rangle * n_0 = \langle \tilde{\mathbf{v}} G \rangle * n_0 \quad (19)$$

mit

$$\tilde{G} = G - \langle G \rangle. \quad (20)$$

Wenn es also gelingt, \tilde{G} allein durch $\langle G \rangle$ und Momente von $\tilde{\mathbf{v}}$ auszudrücken, so erhält man aus (19) und (13) einen Ausdruck für \mathbf{D} . Aus der Gleichung für $G = G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$:

$$\mathcal{L} G \equiv (\mathring{\mathcal{L}} + \delta \mathcal{L}) G = 0 \quad \text{für } t > t', \quad (21)$$

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') &= \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ \text{für } t &\rightarrow t' + 0 \end{aligned} \quad (22)$$

folgt nun in der üblichen Weise durch Zerlegung von G in Mittelwert und Schwankung eine formal exakte Beziehung der gewünschten Art, die sich jedoch nur näherungsweise auswerten läßt. Um dies zu zeigen, fassen wir (21) und (22) folgendermaßen zusammen ($G = 0$ für $t < t'$):

$$\begin{aligned} (\mathring{\mathcal{L}} + \delta \mathcal{L})(\langle G \rangle + \tilde{G}) &= \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t'). \end{aligned} \quad (23)$$

Subtrahieren wir hiervon den Mittelwert, so erhalten wir eine Gleichung für \tilde{G} :

$$(\mathring{\mathcal{L}} + \delta \mathcal{L}) \tilde{G} = -\delta \mathcal{L} \langle G \rangle + \langle \delta \mathcal{L} \tilde{G} \rangle, \quad (24)$$

wobei im letzten Term rechts die Divergenz des Teilchenflusses entsteht, wenn wir die Gleichung auf n_0 „anwenden“. Es ist nun üblich, die Existenz eines Integraloperators M (Massenoperator) anzunehmen, der bei Anwendung auf $\langle G \rangle$ gerade diesen letzten Term von (24) erzeugt:

$$\langle \delta \mathcal{L} \tilde{G} \rangle = M \langle G \rangle, \quad (25)$$

so daß sich der Mittelwert von (23) als „Dyson-Gleichung“ schreiben läßt:

$$(\mathring{\mathcal{L}} + M) \langle G \rangle = \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t'). \quad (26)$$

Aus dem Obigen ist klar, daß es eine einfache Beziehung zwischen den Diffusionskoeffizienten und dem Massenoperator geben muß. Wenden wir z.B. (25) auf n_0 an, so erhalten wir, in ausführlicher Schreibweise:

$$\begin{aligned} &\int d^d x' \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \langle \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \tilde{G}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', 0) \rangle n_0(\mathbf{x}') \quad (27) \\ &= \int d^d x'' \int_0^\infty dt'' M(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}'', t'') \\ &\quad \cdot \int d^d x' \langle G(\mathbf{x}'', t''; \mathbf{x}', 0) \rangle n_0(\mathbf{x}') \\ &= \int d^d x'' \int_0^\infty dt'' M(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}'', t'') \langle n(\mathbf{x}'', t'') \rangle. \end{aligned}$$

Die linke Seite kann nach (19) und (13) mit dem

Tensor \mathbf{D} in Beziehung gebracht werden, und es folgt:

$$-\nabla \cdot \mathbf{D} \cdot \nabla \langle n \rangle = M \langle n \rangle. \quad (28)$$

Wir sehen also, daß mit M auch \mathbf{D} strenggenommen als Integraloperator aufgefaßt werden muß. Die Näherung, in der M als einfacher Diffusionsoperator mit konstantem \mathbf{D} wirkt, läßt sich am besten über die Fourier-Transformierte $M_{k\omega}$ bezüglich der Variablen $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, $(t - t')$ und den Limes $\omega \rightarrow 0$, $\mathbf{k} \rightarrow 0$ erreichen, wobei dann in (27) $\langle n(\mathbf{x}', t') \rangle \approx \langle n(\mathbf{x}, t) \rangle$ gesetzt wird. Man erhält daher für das Diagonalelement D_{jj} bezüglich der Diffusion in x_j -Richtung (mit Einheitsvektor \mathbf{e}_j), falls es existiert:

$$D_{jj} = (2\pi)^{d+1} \lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ \mathbf{k} \rightarrow 0}} [M_{k\omega}/k^2]_{\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_j}. \quad (29)$$

Im folgenden Abschnitt werde ich mich also mit der Ableitung und Auswertung einer Näherungs-Gleichung für M befassen, obwohl die mathematische Existenz dieser Größe keineswegs gesichert ist.

4. Der Massenoperator

Zur Ableitung der Gleichung für M muß zunächst (24) für \tilde{G} gelöst werden; in der Kurzschreibweise lautet diese Gleichung:

$$\mathcal{L} \tilde{G} = R, \quad (30)$$

$$R = -\delta \mathcal{L} \langle G \rangle + M \langle G \rangle. \quad (31)$$

Gleichung (30) ist mit der Anfangsbedingung

$$\lim_{t \rightarrow t'+0} \tilde{G}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = 0 \quad (32)$$

zu lösen, da der entsprechende Anfangswert von G voll auf denjenigen von $\langle G \rangle$ übertragen werden muß.

oder ausführlicher geschrieben:

$$M^{(2)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \langle \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}', t') \rangle \langle G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} . \quad (38)$$

Hiermit ist die Differentialgleichung (26) für $\langle G \rangle$ gekoppelt, die in ausführlicher Schreibweise folgendermaßen lautet:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{x}{L_s} \frac{\partial}{\partial y} \right) \langle G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \rangle + \int d^d x'' \int_{t'}^t dt'' M^{(2)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}'', t'') \langle G(\mathbf{x}'', t''; \mathbf{x}', t') \rangle \\ & = \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t'). \end{aligned} \quad (39)$$

Da ich im folgenden die Konsequenzen des Gleichungssystems (38), (39) behandeln werde, ist der Zeitpunkt gekommen, auf die Geschichte dieser Gleichungen näher einzugehen. Sie wurden im Limes

Also lautet die formale Lösung von (30):

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') &= \int d^d x'' \int_{t'}^t dt'' G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}'', t'') \\ &\quad \cdot R(\mathbf{x}'', t''; \mathbf{x}', t') \\ &\equiv GR = (\langle G \rangle + \tilde{G}) R \end{aligned} \quad (33)$$

oder als von Neumannsche Reihe:

$$\tilde{G} = \langle G \rangle \sum_{n \geq 1} R^n. \quad (34)$$

Setzt man hier (31) ein, so kann das Ergebnis auch so geschrieben werden:

$$\tilde{G} = \sum_{n \geq 1} [-\langle G \rangle (\delta \mathcal{L} - M)]^n \langle G \rangle \quad (35)$$

und nach (25) erhält man daraus M , indem man (35) von links mit $\delta \mathcal{L}$ multipliziert, den Mittelwert bildet und den rechten Faktor $\langle G \rangle$ wegläßt:

$$M = \sum_{n \geq 1} \langle \delta \mathcal{L} [-\langle G \rangle (\delta \mathcal{L} - M)]^n \rangle. \quad (36)$$

Dies ist nun leider eine implizite Gleichung für M , und es ist auch nicht sicher, ob sie für den gewünschten Limes $\omega \rightarrow 0$, $\mathbf{k} \rightarrow 0$, günstig ist. Die Ableitung von (36) ist für jede stochastische Differentialgleichung erster Ordnung in der Zeit möglich und ist die übliche Anwendung eines „Projektionsformalismus“ [13]. Exakte Propagatorrelationen deuten jedoch darauf hin, daß die niedrigste Näherung mit $n = 1$ nur richtig ist, wenn M als kleine Störung des mittleren Differentialoperators $\hat{\mathcal{L}}$ aufgefaßt werden kann [14], wenn also $\langle G \rangle$ sich nicht sehr von der ungestörten Greenschen Funktion \hat{G} unterscheidet. Dennoch möchte ich jetzt diese niedrigste Näherung untersuchen, in der die rechte Seite über $\langle G \rangle$ immer noch von M abhängt, und mit $M^{(2)}$ bezeichnen:

$$M^{(2)} = -\langle \delta \mathcal{L} \langle G \rangle \delta \mathcal{L} \rangle \quad (37)$$

$L_s \rightarrow \infty$, also ohne Scherströmung des Hintergrundes, von P. H. Roberts [15] im Stile Kraichnans [16] abgeleitet und näher untersucht; er fand u.a. für homogene, isotrope, stationäre Turbulenz eine Lösung für kurze Zeiten, d.h. $t - t' \ll l/v$, und eine Grenzgeschwindigkeit für $\langle G \rangle$, d.h.

$$\langle G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \rangle = 0 \quad \text{für } |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| > 2v|t - t'|,$$

wobei l die Korrelationslänge des Geschwindigkeits-tensors ist, und v^2 das quadratische Mittel einer Komponente von $\tilde{\mathbf{v}}$:

$$v = [\langle (\tilde{v}_j(\mathbf{x}, t))^2 \rangle]^{1/2} = \text{const.} \quad (40)$$

Für diesen Limes kurzer Zeiten kennt man jedoch die exakte Funktion $\langle G \rangle$ [17]: Solange jedes Flüssigkeitsteilchen noch die „Startgeschwindigkeit“ $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}', t')$ hat, welche mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $P(\tilde{\mathbf{v}})$ vorliege, so wird (immer noch mit

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{x}{L_s} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \langle G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \rangle = 0 \quad (42)$$

mit

$$D_{ij}(\mathbf{x}, t) = v^2 \int d^d x'' \int_0^t dt'' S_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}'', t'') \langle G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}'', t'') \rangle \quad (43)$$

$$S_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}'', t'') = \langle \tilde{v}_i(\mathbf{x}, t) \tilde{v}_j(\mathbf{x}'', t'') \rangle / v^2, \quad (44)$$

wobei die untere Integrationsgrenze nach $t'' = 0$ verlegt wurde. Bei homogener und stationärer Turbulenz wird $D_{ij}(\mathbf{x}, t)$ für $t \gg l/v$ und $|\mathbf{x}|, |\mathbf{x}'| \ll L_s$ konstant und bei isotropem Spektrum S_{ij} diagonal — es sind Näherungen für die Ausdrücke in (29) —, und die Lösung von (42) für $t \geq t'$ und $d=2$ lautet dann:

$$\begin{aligned} \langle G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \rangle &= [4\pi(t - t') D_{xx}^{1/2} \Delta_{yy}^{1/2}]^{-1} \\ &\cdot \exp \left\{ -\frac{(x - x')^2}{4D_{xx}(t - t')} - \frac{(y - y' - (x + x')(t - t')/2L_s)^2}{4\Delta_{yy}(t - t')} \right\}, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\Delta_{yy} = D_{yy} + (t - t')^2 D_{xx}/12L_s^2. \quad (46)$$

Wir sehen, daß sich die Scherströmung nur bei der Diffusion in y -Richtung auswirkt, während die Diffusion in x -Richtung symmetrisch um den Ausgangswert $x = x'$ vonstatten geht. Empirische Kenntnisse über die Ausbreitung von Temperaturstörungen in einer turbulenten Scherströmung deuten jedoch auf eine schwach asymmetrische Temperaturverteilung bezüglich der Variablen x hin, mit größeren Werten in Richtung des mittleren Geschwindigkeitsgradienten, was durch eine geeignete Korrelation der Startgeschwindigkeiten erklärt wird [20]. Trotz dieser Tatsache und der im Zusammenhang mit (41) erwähnten Schwierigkeit will ich im folgenden die Diffusion in x -Richtung aufgrund von

$L_s \rightarrow \infty$:

$$\langle G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \rangle = \frac{1}{(t - t')^d} P \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{t - t'} \right). \quad (41)$$

Entnimmt man nun den Experimenten, daß $P(\tilde{\mathbf{v}})$ etwa eine Gauß-Verteilung ist, so sollte $\langle G \rangle$ ebenfalls Gaußisch sein, und es sollte keine scharfe Grenzgeschwindigkeit vorliegen. Dieser unphysikalische Zug von (38), (39) zeigt sich auch bei langen Zeiten, also für $|t - t'| \gg l/v$, nur tritt er dann etwas zurück, da es weniger Teilchen in dem Gebiet gibt, wo $\langle G \rangle$ fälschlicherweise verschwindet. Die asymptotische Lösung für große Raum- und Zeitskalen können wir auch für endliches L_s erhalten, wenn wir $\partial/\partial \mathbf{x}'' \langle G(\mathbf{x}'', t''; \mathbf{x}', t') \rangle$ in Gl. (39) um $\mathbf{x}'' = \mathbf{x}$, $t'' = t$ entwickeln und nur den ersten Term beibehalten. Wir erhalten dann für $t - t' \gg l/v$ die Gleichung

(43) bestimmen: Sie ergibt sich aus einer effektiven Korrelationszeit τ_x , die als doppelter Mittelwert, nämlich als spektrales und Ensemble-Mittel der Greenschen Funktion G geschrieben werden kann:

$$D_{xx}(\mathbf{x}, t) = v^2 \tau_x, \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \tau_x &= \int d^d x' \int_0^t dt' S_{xx}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \\ &\cdot \langle G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \rangle. \end{aligned} \quad (48)$$

Im Fall der magnetischen Abbildung hat τ_x die Bedeutung einer effektiven Korrelationslänge in z -Richtung. Auch für schwach inhomogene und schwach instationäre Turbulenz wird man von (45)

bis (48) ausgehen können, wobei alle Funktionen als schnell veränderlich bezüglich der Variablen $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$, $t - t'$ und langsam veränderlich bezüglich \mathbf{x} , t angesehen werden. Schließlich sei noch bemerkt, daß die asymptotische Lösung (45) das Problem des „weißen Rauschens“ exakt löst, also für

$$S_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \sim \delta_{ij} \delta(t - t').$$

$$S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \int d\mathbf{k} \int d\omega \exp\{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') - i\omega(t - t')\} (1 - \mathbf{k}\mathbf{k}/k^2) S_{k\omega}. \quad (49)$$

Ohne wesentliche Einschränkungen kann ich dann noch folgende Funktionen $s(k)$, $\sigma_{k\omega}$ und $\sigma(k, t)$ einführen:

$$S_{k\omega} = s(k) \sigma_{k\omega}; \quad \int d\omega \sigma_{k\omega} = 1, \quad (50)$$

$$\sigma(k, t) = \int d\omega \exp(-i\omega t) \sigma_{k\omega};$$

$$\sigma(k, 0) = 1. \quad (51)$$

Die Funktion $\sigma(k, t)$ dient zur phänomenologischen Beschreibung der Relaxation einer Schwankung mit der räumlichen Ausdehnung k^{-1} . Im hydrodynamischen Fall liegt es nahe, wegen des Trägheitsterms $(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla)$ in der Bewegungsgleichung für $\tilde{\mathbf{v}}$ eine typische Zeitskala $\Omega_k^{-1} = (kv)^{-1}$ anzunehmen; eine geeignete Funktion wäre dann etwa

$$\sigma(k, t) = \exp(-\Omega_k |t|), \quad (52)$$

$$\Omega_k = kv, \quad (53)$$

wobei der Betrag von t gewählt ist, um die zeitliche Symmetrie der Funktion zu gewährleisten. Die Frequenzabhängigkeit der Spektralfunktion $S_{k\omega}$ ist dann gegeben durch den Faktor

$$\sigma_{k\omega} = \frac{1}{\pi} \frac{\Omega_k}{\Omega_k^2 + \omega^2}. \quad (54)$$

Um die (Eulerschen) Korrelationslängen und -zeiten zu definieren, ist es praktisch, die skalare Rücktransformierte von $S_{k\omega}$ zu betrachten, die ich mit $S(\mathbf{x}, t)$ bezeichne. Die Korrelationszeit T_0 sei dann definiert durch

$$T_0 = \int_0^\infty dt S(0, t)/S(0, 0)$$

$$= \langle \langle \int_0^\infty dt \sigma(k, t) \rangle \rangle. \quad (55)$$

Hier und im folgenden bedeutet das Zeichen $\langle \langle \rangle \rangle$ die Mittelwert-Bildung mit $S_{k\omega}$ oder, falls die zu mittelnde Größe nicht von ω abhängt, mit $s(k)$.

5. Der Korrelationstensor

Zur Auswertung von (48) ist es wichtig, Eigenarten des Korrelationstensors $S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ zu wissen. Bei homogener, stationärer und isotroper Turbulenz genügt es, eine skalare Funktion $S_{k\omega}$ der Variablen $|\mathbf{k}|$, ω im Fourieraum zu kennen; es ist dann nämlich [18]:

$$Eine bequeme Definition der Korrelationslänge l_0 ist das spektrale Mittel von $1/k$ [19]:$$

$$l_0 = \langle \langle 1/k \rangle \rangle. \quad (56)$$

Unser Ansatz (52) führt also auf folgende Skalierung:

$$T_0 = \langle \langle \Omega_k^{-1} \rangle \rangle = l_0/v. \quad (57)$$

Im Falle der magnetischen Abbildung kann man annehmen, daß mit der seitlichen Versetzung der Mitte eines Plasmazyinders der Länge L_0 um die Strecke $\delta x \ll L_0$ ein Magnetfeld $B_x \ll B_z \approx B_0$ verknüpft ist, das sich aus der infinitesimalen Abbildungsgleichung ergibt:

$$\delta x/L_0 = B_x/B_0 \approx b_x. \quad (58)$$

Bezeichnen wir die Korrelationslänge der magnetischen Schwankungen bezüglich der z -Richtung (bei konstant gehaltenen Werten von x und y) mit L_0 , so ergibt sich aus (58) folgende Gleichung für die mittlere quadratische Versetzung in x -Richtung:

$$\langle (\delta x)^2 \rangle \approx \langle b_x^2 \rangle L_0^2 \cong v^2 L_0^2. \quad (59)$$

Es liegt nun nahe, $l_0^2 = \langle (\delta x)^2 \rangle$ zu postulieren [9], und wir erhalten dann die hydrodynamische Skalierung (57) auch im Falle der magnetischen Abbildung:

$$L_0 = l_0/v. \quad (60)$$

Daher können wir unseren Ansatz (52) für beide Fälle zugrundelegen. Es ist jedoch keineswegs selbstverständlich, ob wir isotrope homogene Turbulenz vor dem Hintergrund einer Couette-Strömung $\langle \mathbf{v} \rangle$ bzw. eines Scherfeldes $\langle \mathbf{b}_\perp \rangle$ voraussetzen können. Eigentlich ist ein Ansatz wie in (49) nur sinnvoll, wenn x und x' hinreichend nahe bei $x=0$ liegen, wo $\langle \mathbf{v} \rangle$ verschwindet und daher keine Vorzugsrichtung ausgezeichnet ist. Für $|x|, |x'| \lesssim l_0$ haben wir $|\langle \mathbf{v} \rangle| \lesssim l_0/L_s \ll 1$, also eine sehr kleine Anisotropie bzw. Inhomogenität. Im Rahmen einer WKB-

Analyse der x -Abhängigkeit der Schwankungen $\tilde{v}(\mathbf{x}, t)$ kann man sich jedoch von der Sonderrolle der Ebene $x=0$ freimachen, indem man die Isotropie von S in einem lokal mit der Geschwindigkeit $\langle \mathbf{v} \rangle$ mitbewegten System annimmt. Bezeichnen wir die an einem Aufpunkt \mathbf{x} vorliegende mittlere Geschwindigkeitskomponente in y -Richtung mit \tilde{v}_y ,

$$\tilde{v}_y = x/L_s, \quad (61)$$

so können wir den Ansatz entsprechend Gl. (49) im Koordinatensystem $\hat{x} = x$, $\hat{y} = y - \tilde{v}_y t$, $\hat{t} = t$ versuchen, mit einem Spektrum $\hat{S}_{\hat{k}\hat{\omega}}$. Bei einer Galilei-Transformation ins Laborsystem bleiben die Relativgeschwindigkeiten invariant — \hat{S} ist also eine skalare Größe —, auch $\mathbf{k} = \hat{\mathbf{k}}$ ist invariant, aber die Frequenz erleidet eine Rotverschiebung: $\omega = \tilde{\omega} - k_y \tilde{v}_y$. Wir erhalten daher

$$S_{k\omega} = \hat{S}_{k\omega - k_y \tilde{v}_y} \quad (62)$$

und nach (54):

$$\sigma_{k\omega} = \frac{1}{\pi} \frac{\Omega_k}{\Omega_k^2 + (\omega - k_y \tilde{v}_y)^2}. \quad (63)$$

Die Interpretation dieses Ansatzes für den Fall der magnetischen Abbildung ist offensichtlich: Da bei $x \neq 0$ das mittlere Feld $\langle \mathbf{B} \rangle$ nicht mehr in z -Richtung weist, kann man die Isotropie des Tensors von \mathbf{b}_\perp höchstens in einem schiefwinkligen Koordinatensystem (mit $\mathbf{e}_z \parallel \langle \mathbf{B} \rangle$) erwarten, das dem lokalen Ruhssystem im Falle der Scherströmung entspricht. Mit der Galilei-Transformation korrespondiert hier der Übergang zu einem rechtwinkligen Koordinatensystem, in dem dann der Korrelationstensor notwendigerweise die aus (63) folgende Inhomogenität und Anisotropie zeigt.

6. Effektive Korrelationszeiten und -längen

Bevor ich (48) für die Korrelationszeit τ_x auswerte, möchte ich kurz zeigen, daß man diese Gleichung auch einfacher herleiten kann, wenn man im exakten Ausdruck für den Diffusionskoeffizienten eine Tripel-Korrelation zwischen G und $\tilde{\mathbf{v}}$ vernachläßigt. Hierzu betrachte ich nach Taylor [21] die Versetzung $X_i(t)$ eines Flüssigkeitsteilchens in der Zeit t parallel zur x_i -Achse aufgrund eines stochastischen Geschwindigkeitsfeldes $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \langle \mathbf{v} \rangle$:

$$X_i(t) = \int_0^t dt' \tilde{v}_i(\mathbf{x}(t'), t'), \quad (64)$$

wobei $\mathbf{x}(t')$ die zufällige Bahn beschreibt:

$$d\mathbf{x}(t')/dt' = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t'), t'). \quad (65)$$

Jedes der Teilchen, die zur Zeit t am gleichen Ort $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ ankommen, leistet folgenden Beitrag zum Diffusionskoeffizienten D_{ii} :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} X_i^2(t) &= \int_0^t dt' \tilde{v}_i(\mathbf{x}(t), t) \tilde{v}_i(\mathbf{x}(t'), t') \\ &= \int d^d x' \int_0^t dt' \tilde{v}_i(\mathbf{x}, t) \tilde{v}_i(\mathbf{x}', t') \delta^d(\mathbf{x}' - \mathbf{x}(t')). \end{aligned} \quad (66)$$

Die zuletzt eingeführte δ -Funktion ist die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, ein Teilchen zur Zeit $t' < t$ am Ort \mathbf{x}' anzutreffen, wenn es zur Zeit t bei \mathbf{x} ankommen muß; dies ist aber auch gleich der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte, daß ein Teilchen zur Zeit t bei \mathbf{x} ankommt, wenn es zur Zeit $t' < t$ bei \mathbf{x}' war, denn die Teilchendichte selbst ist längs einer Bahn konstant. Es gilt also:

$$\delta^d(\mathbf{x}' - \mathbf{x}(t')) = G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \quad (67)$$

und daher

$$\begin{aligned} D_{ii}(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle X_i^2(t) \rangle \\ &= \int d^d x' \int_0^t dt' \langle \tilde{v}_i(\mathbf{x}, t) \tilde{v}_i(\mathbf{x}', t') \rangle \\ &\quad \cdot G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t'). \end{aligned} \quad (68)$$

Auf der rechten Seite dieser exakten Gleichung steht das zeitliche Integral der Lagrangeschen Geschwindigkeits-Autokorrelation [15], deren xx -Element in der geschilderten Näherung unmittelbar auf die entsprechenden Größen in (47) und (48) führt. Zur Auswertung der Näherung (48) für τ_x kann man dort verschiedene Näherungen für $\langle G \rangle$ einsetzen. Um sofort ein explizites Resultat zu erhalten, liegt es nahe, für $\langle G \rangle$ den freien Propagator \mathring{G} einzusetzen, wie er im Falle $\tilde{v} = 0$ vorliegen würde; diese „Bourrettsche Näherung“ [12] erhalten wir für $d = 2$ aus (45) im Limes $D_{ii} \rightarrow 0$, nämlich:

$$\begin{aligned} \mathring{G}(x, y, t; x', y', t') \\ = \delta(x - x') \delta(y - y' - (x'/L_s)(t - t')) \end{aligned}$$

und nach (48) folgende Korrelationszeit:

$$\begin{aligned} \dot{\tau}_x &= \int dx' \int dy' \int_0^t dt' S_{xx}(x, y, t; x', y', t') \\ &\quad \cdot \mathring{G}(x, y, t; x', y', t') \\ &= \int_0^t dt' S_{xx}(x, y, t; x, y - (x/L_s)(t - t'), t') \end{aligned} \quad (69)$$

Einsetzen von (49) ergibt

$$\begin{aligned}\dot{\tau}_x &= \int dt' \int d^2k \int d\omega \left(1 - \frac{k_x^2}{k^2}\right) \\ &\quad \cdot \exp \left\{ -i \left(\omega - k_y \frac{x}{L_s} \right) (t - t') \right\} S_{k\omega} \\ &\rightarrow \begin{cases} t & \text{für } t \rightarrow 0 \\ \langle\langle \pi \delta(\omega - k_y x / L_s) \rangle\rangle & \text{für } t \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (70)\end{aligned}$$

Für hinreichend lange Zeit strebt also $\dot{\tau}_x$ gegen einen Grenzwert, den wir mit Hilfe von (63), (61) und (57) als Eulersche Korrelationszeit identifizieren können:

$$\langle\langle \pi \delta(\omega - k_y x / L_s) \rangle\rangle = \langle\langle \Omega_k^{-1} \rangle\rangle = T_0. \quad (71)$$

Im Falle der magnetischen Abbildung ergibt sich stattdessen die Eulersche Korrelationslänge L_0 , also das quasilineare Ergebnis

$$D_{xx} = L_0 \langle|\tilde{B}_x|^2\rangle / B_0^2,$$

und wegen (60) in jedem Falle:

$$D_{xx} = v l_0 \quad (72)$$

ein Resultat, das von Roberts aus Dimensionsgründen angenommen [15] und von Saffman in einem Spezialfall großenordnungsmäßig erhalten wurde [22]. Die Relation (60) zwischen den Korrelationslängen L_0 , l_0 läuft den „quasilinearen“ Annahmen bei Rechester und Rosenbluth [8] allerdings zuwider; dort wird vielmehr zur Abschätzung von L_0 ein „quasi-weißes“ Rauschen für das Spektrum $S_{k\omega}$ angenommen, also $S_{k\omega} \approx \text{const.}$ für $|\omega| \lesssim \Omega = N/R$ und $|k_y| \lesssim M/r_0$ bei festem x , und $S_{k\omega} = 0$ sonst. Hier sind N , M , die Nummern der Fourier-Komponenten von \tilde{B}_x mit der kleinsten noch berücksichtigten Wellenlänge in z - bzw. y -Richtung, und r_0 ist der kleine Radius der betrachteten magnetischen Oberfläche. Setzen wir den Ursprung unseres Koordinatensystems auf diese Oberfläche, also $x = 0$, so folgt aus (71) als Korrelationslänge für dieses quasi-weiße Rauschen:

$$L_0 = \langle\langle \pi \delta(\omega) \rangle\rangle = \pi R / 2N, \quad (73)$$

während in [8] inkonsequenterweise eine Korrelationslänge R verwendet wurde. Die dort gegebene Abschätzung $\langle b_x^2 \rangle \approx 10^{-8}$ aufgrund eines „beobachteten“ Diffusionskoeffizienten $D_{xx} \approx 10^{-5}$ cm muß also etwa um den Faktor $N \gg 1$ erhöht werden, falls die Annahme des quasi-weißen Rauschens richtig ist. Man kann jedoch auch annehmen, daß L_0 in der Größenordnung der Scherlänge $L_s \gtrsim R$

liegen könnte, da die Elektronen, nachdem sie die Strecke L_s („Verbindungslänge“) durchlaufen haben, wieder in das gleiche Gebiet innerhalb des Torus gelangen [9]. Es ist also auch der dem weißen Rauschen entgegengesetzte Extremfall von Interesse, in dem die Eulersche Korrelationslänge (73) gar nicht existiert, da

$$S_{k\omega} = s(k) \delta(\omega) \quad (74)$$

angenommen wird. Im hydrodynamischen Fall entspricht dies statischen Fluktuationen, und die Bourretsche Näherung wird unbrauchbar. Ich will daher zum Schluß (38) und (39) näherungsweise bei $x = 0$ auswerten, wo alle Größen nur von der Differenz der Orts- und Zeitvariablen abhängen. Nach Fouriertransformation lauten diese Gleichungen:

$$\begin{aligned}M_{k\omega}^{(2)} &\equiv \int \frac{d^d(x - x')}{(2\pi)^d} \int \frac{d\omega}{2\pi} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ -i \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') + i\omega(t - t') \right\} \\ &\quad \cdot M^{(2)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \quad (75)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= v^2 \int d^d k' \int d\omega' \mathbf{k} \cdot \mathbf{S}_{k'\omega'} \cdot \mathbf{k} \langle G \rangle_{\mathbf{k} - \mathbf{k}' \omega - \omega'} \\ &\quad [-i\omega + (2\pi)^{d+1} M_{k\omega}^{(2)}] \langle G \rangle_{k\omega} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d+1}}. \quad (76)\end{aligned}$$

Setzen wir (76) in (75) ein und berücksichtigen (49) und (74), so lautet die Gleichung für $M_{k\omega}^{(2)}$:

$$\begin{aligned}M_{k\omega}^{(2)} &= \frac{v^2 k^2}{(2\pi)^{d+1}} \\ &\quad \cdot \int d^d k' \frac{1}{-i\omega + (2\pi)^{d+1} M_{k-k'\omega}^{(2)}} \frac{k_\perp'^2}{k'^2} s(k'), \quad (77)\end{aligned}$$

wobei \mathbf{k}_\perp' die zu \mathbf{k} senkrechte Komponente von \mathbf{k}' ist. Hier können wir versuchsweise den Grenzübergang $\omega \rightarrow 0$ ausführen und das asymptotische Verhalten von $M_{k0}^{(2)}$ für $k \rightarrow 0$ und $k \rightarrow \infty$ bestimmen; im letzteren Fall erhalten wir für $d = 2$:

$$M_{k0}^{(2)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} v k / (2\pi)^3 \quad (78)$$

wegen

$$\int d^2 k' (k_\perp'^2 / k'^2) s(k') = \frac{1}{2} \int d^2 k' s(k') = 1. \quad (79)$$

Andererseits definiere ich eine noch zu bestimmende Größe l durch den Limes $k \rightarrow 0$:

$$M_{k0}^{(2)} \xrightarrow{k \rightarrow 0} v l k^2 / (2\pi)^3. \quad (80)$$

Als Interpolationsformel für den gesamten k' -Raum

kann ich daher z. B. folgende Funktion verwenden:

$$M_{k0}^{(2)} \approx \frac{vk}{(2\pi)^3} \frac{kl}{1+kl}. \quad (81)$$

Setzen wir dies auf der rechten Seite von (77) mit $\omega \rightarrow 0$ ein und betrachten das Ergebnis für $k \rightarrow 0$, so folgt eine Gleichung für l :

$$\frac{vlk^2}{(2\pi)^3} \approx \frac{v^2 k^2}{(2\pi)^3} \int d^2 k' \frac{\frac{1}{2} s(k')}{v k'^2 l} (1 + k' l) \quad (82)$$

oder:

$$l \approx (1/l) \langle \langle 1/k'^2 \rangle \rangle + \langle \langle 1/k' \rangle \rangle. \quad (83)$$

Wir finden also Größenordnungsmäßig:

$$l \approx \text{Max}(\langle \langle 1/k'^2 \rangle \rangle^{1/2}, \langle \langle 1/k' \rangle \rangle), \quad (84)$$

und nach (29) und (80) ergibt sich

$$D_{xx} = vl, \quad (85)$$

also ein ganz ähnlicher Ausdruck wie in (72). Zu der

neu aufgetretenen Länge $\langle \langle 1/k'^2 \rangle \rangle^{1/2}$ sei noch bemerkt, daß das zugehörige Integral bei $k' \approx 0$ immer existiert, da aus $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ $s(k) \sim k^2$ für $k \rightarrow 0$ folgt [18]. Als Fazit finde ich also, daß die Formel (72) für D_{xx} der Größenordnung nach für $L_0 \gtrsim l_0/v$ immer richtig ist, solange man in der Entwicklung (36) des Massenoperators beim niedrigsten Term abbrechen darf, oder — was auf dasselbe hinausläuft — solange man in der Darstellung (68) des Diffusionskoeffizienten auf die Tripelkorrelation verzichten kann. Ob diese Voraussetzung leicht erfüllbar ist, läßt sich wohl am ehesten durch numerische Simulationen und rechenbare stochastische Modelle zur turbulenten Diffusion prüfen [23].

Herrn Dipl.-Phys. W. Maasjost danke ich für Diskussionen, insbesondere im Zusammenhang mit Gleichung (67). Diese Arbeit wurde im Sonderforschungsbereich 162, Plasmaphysik Bochum/Jülich, angefertigt.

- [1] L. Spitzer, Physics of Fully Ionized Gases, J. Wiley & Sons, New York 1962, S. 43.
- [2] D. Pfirsich u. A. Schlüter, Report MPI/PA/7/62 des Max-Planck-Instituts für Physik und Astrophysik, München 1962.
- [3] A. A. Galeev u. R. Z. Sagdeev, Sov. Phys.-JETP **26**, 233 (1968).
- [4] M. N. Rosenbluth, R. D. Hazeltine u. F. L. Hinton, Phys. Fluids **15**, 116 (1972).
- [5] B. B. Kadomtsev u. O. P. Pogutse, in "Reviews of Plasma Physics", Vol. 5, p. 249, Consultants Bureau, herausgeg. von M. A. Leontovich, New York 1970.
- [6] Vgl. z.B. R. J. Bickerton, "Theory of Magnetically Confined Plasmas", Proceedings of the Varenna Course 1977, S. 423ff. Herausgeg. von B. Coppi, T. Stringer, R. Pozzoli, E. Sindoni, J. P. Carnihan u. G. G. Leotta.
- [7] M. N. Rosenbluth, R. Z. Sagdeev, J. B. Taylor u. G. M. Zaslavski, Nucl. Fusion **6**, 297 (1966).
- [8] A. B. Rechester u. M. N. Rosenbluth, Phys. Rev. Lett. **40**, 38 (1978).
- [9] B. B. Kadomtsev u. O. P. Pogutse, Proceedings 7th Int. Conf. on Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Research, Innsbruck (Österreich), IAEA-CN-37/O-1, 649 (1979).
- [10] J. A. Krommes, Suppl. Progr. Theor. Phys. **64**, 137 (1978).
- [11] T. H. Stix, Phys. Rev. Lett. **30**, 833 (1973) und Nucl. Fusion **18**, 353 (1978).
- [12] R. C. Bourret, Canad. J. Phys. **38**, 665 (1960) und **40**, 782 (1962).
- [13] R. Zwanzig, "Lectures in Theoretical Physics", herausgeg. von W. E. Brittin, Interscience, London 1961, S. 106.
- [14] K. Elsässer u. P. C. de Jager, "Exact Propagator Relations for Stochastic Equations", SFB-Report 80-L2-065 (1980).
- [15] P. H. Roberts, J. Fluid Mech. **11**, 257 (1961).
- [16] R. H. Kraichnan, J. Fluid Mech. **5**, 497 (1959).
- [17] G. K. Batchelor, Proc. Camb. Phil. Soc. **48**, 345 (1952).
- [18] G. K. Batchelor, The Theory of Homogeneous Turbulence, Cambridge University Press, 1953.
- [19] Der Zusammenhang mit der hydrodynamischen isotropen Turbulenz [18] mit $d = 3$ ist gegeben durch $s(k) = E(k)/4\pi k^2 v^2$ und $\langle \langle k^{-1} \rangle \rangle = 4L_p/3\pi$, wobei $E(k)$ das Energiespektrum und L_p die Makro-Skala der longitudinalen Geschwindigkeitsfluktuationen ist.
- [20] J. O. Hinze, Turbulence, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York 1959.
- [21] G. I. Taylor, Proc. London Math. Soc. A **20**, 196 (1921).
- [22] P. G. Saffman, unveröffentlicht, aber in [15] zitiert, verwendete (39) mit $L_s \rightarrow \infty$ und $s(k) \sim k^2 \exp(-k^2/k_0^2)$, $\sigma(k, t) = \exp(-k^2 v^2 t^2)$.
- [23] W. Maasjost, in Vorbereitung.